ВЕСЦІ НАЦЫЯНАЛЬНАЙ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСІ № 1 2015
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 517.925

М. С. БЕЛОКУРСКИЙ

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЕРУГИНА О СУЩЕСТВОВАНИИ НЕРЕГУЛЯРНЫХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С НУЛЕВЫМ СРЕДНИМ ПЕРИОДИЧЕСКОГО КОЭФФИЦИЕНТА

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

(Поступила в редакцию 27.02.2015)

Как известно, периодическая дифференциальная система при определенных условиях может иметь периодические решения, период которых несоизмерим с периодом самой системы [1–6] и др. Такие периодические решения присущи достаточно широким классам дифференциальных систем и названы сильно нерегулярными. Отметим, что сильно нерегулярные периодические колебания имеют место, например, в системе с двумя степенями свободы, представляющей собой два одинаковых маятника, соединенных упругой горизонтальной связью с жесткостью, периодически зависящей от времени. Подобного рода колебания могут возникать и в электрическом аналоге такой системы – двух колебательных контурах, соединенных периодически меняющейся емкостью.

В монографии [3, § 36] Н. П. Еругин рассматривал линейную систему вида

$$\dot{x} = (AP(t) + B)x, \quad t \in R, \quad x \in R^n, \quad n \geq 2, \tag{1}$$

где A, B – постоянные $(n \times n)$-матрицы, $P(t)$ – непрерывная ω-периодическая $(n \times n)$-матрица. В системе (1) матрицы A и $P(t)$ будем называть стационарным и периодическим коэффициентами соответственно. Для системы (1) с диагональным периодическим коэффициентом $P(t)$ Н. П. Еругиным изучены вопросы существования сильно нерегулярных периодических решений, при этом, в частности, было доказано, что если матрица A невырожденная, то искомые решения у системы (1) отсутствуют. Случай треугольного периодического коэффициента $P(t)$ был рассмотрен в работе [7].

Следует отметить, что системы вида (1) используются при решении задач управления асимптотическими инвариантами, в том числе показателями Ляпунова, стационарных управляемых систем при помощи периодических управлений [8, 9], а также задач стабилизации линейных систем управления периодической обратной связью, включая проблему Брокетта [10].

В настоящей работе выясним вопросы существования сильно нерегулярных периодических решений системы (1) при условии нулевого среднего значения периодического коэффициента

$$\hat{P} = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} P(\tau)d\tau = 0. \tag{2}$$

Вначале рассмотрим случай, когда стационарный коэффициент A является невырожденным, т. е.

$$\det A \neq 0. \tag{3}$$

Пусть $x(t)$ – Ω-периодическое решение системы (1), при этом считаем, что хотя бы одна из его компонент отлична от стационарной, а отношение ω / Ω является иррациональным числом. Тогда, согласно [5], вектор $x(t)$ удовлетворяет системе

$$\dot{x} = (A\hat{P} + B)x, \quad (AP(t) - A\hat{P})x = 0. \tag{4}$$

В силу условий (2) и (3) последняя система примет вид

$$\dot{x} = Bx, \quad P(t)x = 0. \tag{5}$$

Если столбцы матрицы $P(t)$ линейно независимы, то из второй системы в (5) на основании [6, с. 41] следует тривиальность $x(t)$, что противоречит сделанному допущению. Значит, матрица $P(t)$ имеет неполный столбцовый ранг

$$\operatorname{rank}_{\text{col}} P = k < n. \tag{6}$$

При выполнении условия (6) согласно [6, с. 43] найдется постоянная неособенная $(n \times n)$-матрица Q такая, что у матрицы $P(t)Q$ первые $d = n - k$ столбцов будут нулевыми, в то время как остальные k столбцов будут линейно независимыми. Введем замену переменных

$$x = Qy, \tag{7}$$

которая приводит систему (5) к системе

$$\dot{y} = Fy, \quad P_1(t)y = 0 \quad (F = Q^{-1}BQ,\ P_1(t) = P(t)Q). \tag{8}$$

Эта система имеет сильно нерегулярное периодическое решение $y(t) = Q^{-1}x(t)$. Так как у матрицы $P_1(t)$ первые d столбцов нулевые, а остальные k столбцов линейно независимы, то из второй системы в (8) на основании [6, с. 43] следует, что последние k компонент вектора $y(t)$ будут тривиальными, т. е.

$$y(t) = \operatorname{col}(y^{[d]}(t), y_{[k]}(t)), \quad y^{[d]}(t) = \operatorname{col}(y_1(t), \ldots, y_d(t)), \quad y_{[k]}(t) = \operatorname{col}(y_{d+1}(t), \ldots, y_n(t)) \equiv 0.$$

Это означает, что система (8) имеет следующую структуру:

$$\dot{y}^{[d]} = F_{d,d}y^{[d]}, \quad F_{k,d}y^{[d]} = 0, \quad y_{[k]} = 0, \tag{9}$$

где $F_{d,d}$, $F_{k,d}$ – левые верхний и нижний блоки матрицы F (нижние индексы указывают размерность). Как видно из (9), Ω-периодический вектор $y^{[d]}(t)$ является решением линейной стационарной системы. Поэтому среди собственных значений матрицы коэффициентов $F_{d,d}$ первой системы в (9) будут числа

$$\pm i\lambda_j, \quad (j = 1, \ldots, d';\ d' \le [d/2]), \tag{10}$$

где $\lambda_j = 2m_j\pi/\Omega$, $m_j \in \mathbb{N}$. Пусть l_j – число групп элементарных делителей, отвечающих собственному значению $\pm i\lambda_j$, $(j = 1, \ldots, d';\ l_1 + \ldots + l_{d'} = l;\ 2l \le d)$. Это означает, что вектор $y^{[d]}(t)$ представлен тригонометрическим полиномом вида

$$y^{[d]}(t) = \sum_{j=1}^{d'} a_j \cos\lambda_j t + b_j \sin\lambda_j t, \tag{11}$$

где коэффициенты a_j, b_j зависят от $2l$ произвольных вещественных постоянных. Поскольку $y^{[d]}(t)$ удовлетворяет и второй системе в (9), то имеет место тождество

$$F_{k,d} \sum_{j=1}^{d'} a_j \cos\lambda_j t + b_j \sin\lambda_j t \equiv 0. \tag{12}$$

Итак, если система (1) имеет сильно нерегулярное периодическое решение $x(t)$, то выполняются условия (6), (10), (12), при этом

$$x(t) = Q\operatorname{col}(y^{[d]}(t), 0, \ldots, 0), \tag{13}$$

где вектор $y^{[d]}(t)$ определяется равенством (11).

Покажем, что полученные условия являются достаточными. Обратимся к системе (5). В силу условия (6) найдется постоянная неособенная $(n \times n)$-матрица Q такая, что замена переменных (7) приводит (5) к системе (8), где у матрицы $P_1(t)$ первые d столбцов нулевые, а остальные k столбцов линейно независимы. Согласно [6, с. 43], последнее обстоятельство означает, что $y = \operatorname{col}(y^{[d]}, 0, \ldots, 0)$, $\quad y^{[d]} = \operatorname{col}(y_1, \ldots, y_d)$. С учетом этого система (8) примет вид (9). Поскольку чисто мнимые числа (10) будут собственными значениями матрицы $F_{d,d}$, то первая система в (9) имеет $2l$-параметрическое семейство Ω-периодических решений (11). Так как выполняется тождество (12), то система (9) имеет решение $y(t) = \operatorname{col}(y^{[d]}(t), 0, \ldots, 0)$. Возвращаясь к исходным переменным, находим Ω-периодическое решение системы (5) в виде тригонометрического многочлена (13). В силу условий (2) и (3) вектор $x(t)$ удовлетворяет также системе (4). Тогда из [5] вытекает, что (13) является сильно нерегулярным решением системы (1).

Таким образом, доказана

Т е о р е м а 1. *Пусть в системе* (1) *стационарный коэффициент A является невырожденным, а среднее значение периодического коэффициента* $P(t)$ *является нулевым.*

Если система (1) *имеет сильно нерегулярное периодическое решение, то оно будет тригонометрическим многочленом вида* (13). *Для того чтобы* (13) *было решением системы* (1), *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия* (6), (10), (12).

П р и м е р. Рассмотрим $\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$-периодическую систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x\sin\sqrt{3}t - y(1+\sin\sqrt{3}t) + z\sin\sqrt{3}t, \\ \dot{y} &= x(1-\cos\sqrt{3}t) - y\cos\sqrt{3}t + z\cos\sqrt{3}t, \\ \dot{z} &= x(1+5\sin\sqrt{3}t) - y(1-5\sin\sqrt{3}t) - 5z\sin\sqrt{3}t. \end{aligned} \tag{14}$$

Для этой системы имеем:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P(t) = \begin{pmatrix} 4\sin\sqrt{3}t - \cos\sqrt{3}t & 4\sin\sqrt{3}t - \cos\sqrt{3}t & -4\sin\sqrt{3}t + \cos\sqrt{3}t \\ 3\sin\sqrt{3}t - 2\cos\sqrt{3}t & 3\sin\sqrt{3}t - 2\cos\sqrt{3}t & -3\sin\sqrt{3}t + 2\cos\sqrt{3}t \\ 9\sin\sqrt{3}t - 2\cos\sqrt{3}t & 9\sin\sqrt{3}t - 2\cos\sqrt{3}t & 9\sin\sqrt{3}t - 2\cos\sqrt{3}t \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det A = 1 \neq 0, \quad \hat{P} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\int\limits_0^{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}} P(\tau)\,d\tau = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Согласно [5], а также условиям (2) и (3), искомое периодическое решение $(x(t), y(t), z(t))^T$ системы (14) удовлетворяет системе

$$\begin{gathered} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 4\sin\sqrt{3}t - \cos\sqrt{3}t & 4\sin\sqrt{3}t - \cos\sqrt{3}t & -4\sin\sqrt{3}t + \cos\sqrt{3}t \\ 3\sin\sqrt{3}t - 2\cos\sqrt{3}t & 3\sin\sqrt{3}t - 2\cos\sqrt{3}t & -3\sin\sqrt{3}t + 2\cos\sqrt{3}t \\ 9\sin\sqrt{3}t - 2\cos\sqrt{3}t & 9\sin\sqrt{3}t - 2\cos\sqrt{3}t & 9\sin\sqrt{3}t - 2\cos\sqrt{3}t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{15}$$

С помощью замены переменных

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix},$$

система (15) приводится к системе

$$\begin{pmatrix} \dot u \\ \dot v \\ \dot w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4\sin\sqrt{3}t - \cos\sqrt{3}t \\ 0 & 0 & 3\sin\sqrt{3}t - 2\cos\sqrt{3}t \\ 0 & 0 & 9\sin\sqrt{3}t - 2\cos\sqrt{3}t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Матрица второй системы из (16) имеет один ненулевой столбец. Поэтому соответствующая компонента w периодического нерегулярного решения должна быть нулевой. Тогда система (16) примет вид

$$\begin{pmatrix} \dot u \\ \dot v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \qquad w = 0.$$

Собственные числа матрицы коэффициентов редуцированной системы $\lambda_{1,2} = \pm i$. Поэтому последняя система имеет двухпараметрическое семейство 2π-периодических решений

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos t + b\sin t \\ a\sin t - b\cos t \end{pmatrix}, \quad w = 0,$$

где a, b – произвольные вещественные постоянные, которое будет удовлетворять и системе (16). Возвращаясь к исходным переменным, находим периодическое решение системы (14)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos t + b\sin t \\ a\sin t - b\cos t \\ (a-b)\cos t + (a+b)\sin t \end{pmatrix},$$

которое ввиду иррациональности отношения чисел 2π и $\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$ будет сильно нерегулярным.

Рассмотрим теперь случай вырожденного стационарного коэффициента при условии (2) . Для определенности будем считать, что

$$\operatorname{rank} A = q < n. \tag{17}$$

Пусть $x(t)$ – Ω-периодическое решение системы (1), при этом считаем, что хотя бы одна из его компонент отлична от стационарной, а отношение ω / Ω является иррациональным числом. Из [11, с. 21–22] вытекает, что при выполнении условия (17) найдется постоянная неособенная $(n \times n)$-матрица S такая, что у матрицы SA первые q строк будут линейно независимыми, а остальные $n-q$ строк будут нулевыми. Введем замену переменных

$$x = S^{-1}z, \tag{18}$$

которая приводит систему (1) к системе

$$\dot z = (SAP(t)S^{-1} + SBS^{-1})z, \tag{19}$$

где $SAP(t)S^{-1}$ – непрерывная ω-периодическая $(n \times n)$-матрица, у которой последние $n-q$ строк нулевые.

Тогда в силу [5] Ω-периодический вектор $z(t) = Sx(t)$ удовлетворяет системе

$$\dot z = (SA\hat{P}S^{-1} + SBS^{-1})z, \quad (SAP(t)S^{-1} - SA\hat{P}S^{-1})z = 0. \tag{20}$$

С учетом условия (2) система (20) принимает вид

$$\dot z = Cz, \quad G(t)z = 0 \quad (C = SBS^{-1}, \quad G(t) = SAP(t)S^{-1}). \tag{21}$$

Значит, Ω-периодический вектор $z(t)$ удовлетворяет и системе (21). Первая система из (21) является линейной стационарной системой. Поэтому среди собственных значений ее матрицы коэффициентов C будут числа

$$\pm i\lambda_j \quad (j=1,\ldots,n';\ \ n'\le[n/2]), \tag{22}$$

где $\lambda_j = 2r_j\pi/\Omega, \quad r_j \in \mathbb{N}$. Пусть h_j – число групп элементарных делителей, отвечающих собственному значению $\pm i\lambda_j, \quad (j=1,\ldots,n'; h_1+\ldots+h_{n'}=h; 2h\le n)$. Это означает, что вектор $z(t)$ представлен тригонометрическим полиномом вида

$$z(t)=\left(\sum_{j=1}^{n'}(a_j^{(1)}\cos\lambda_j t + b_j^{(1)}\sin\lambda_j t),\ldots,\sum_{j=1}^{n'}(a_j^{(n)}\cos\lambda_j t + b_j^{(n)}\sin\lambda_j t)\right)^T, \tag{23}$$

где скалярные коэффициенты $a_j^{(i)}$ и $b_j^{(i)}$ $(i=1,\ldots n)$ зависят от $2h$ произвольных вещественных постоянных. Пусть

$$SA=\begin{pmatrix} v_{11} & \ldots & v_{1n}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ v_{q1} & \ldots & v_{qn}\\ 0 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & \ldots & 0\end{pmatrix}, \quad P(t)=\begin{pmatrix} p_{11}(t) & \ldots & p_{1n}(t)\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ p_{n1}(t) & \ldots & p_{nn}(t)\end{pmatrix}, \quad S^{-1}=\begin{pmatrix} s_{11}(t) & \ldots & s_{1n}(t)\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ s_{n1}(t) & \ldots & s_{nn}(t)\end{pmatrix}.$$

Тогда

$$SAP(t)S^{-1}=\begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{n}v_{1i}p_{ij}(t)s_{j1} & \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{n}v_{1i}p_{ij}(t)s_{j2} & \ldots & \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{n}v_{1i}p_{ij}(t)s_{jn}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{n}v_{qi}p_{ij}(t)s_{j1} & \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{n}v_{qi}p_{ij}(t)s_{j2} & \ldots & \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{n}v_{qi}p_{ij}(t)s_{jn}\\ 0 & 0 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & 0\end{pmatrix}.$$

Поскольку $z(t)$ удовлетворяет и второй системе в (21), то имеет место тождество

$$\begin{gathered}
\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}v_{1i}p_{ij}(t)s_{j1}\sum_{j=1}^{n'}(a_j^{(1)}\cos\lambda_j t + b_j^{(1)}\sin\lambda_j t)+\ldots+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}v_{1i}p_{ij}(t)s_{jn}\sum_{j=1}^{n'}(a_j^{(n)}\cos\lambda_j t + b_j^{(n)}\sin\lambda_j t)\equiv\\
\equiv 0,\\
\ldots\\
\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}v_{qi}p_{ij}(t)s_{j1}\sum_{j=1}^{n'}(a_j^{(1)}\cos\lambda_j t + b_j^{(1)}\sin\lambda_j t)+\ldots+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}v_{qi}p_{ij}(t)s_{jn}\sum_{j=1}^{n'}(a_j^{(n)}\cos\lambda_j t + b_j^{(n)}\sin\lambda_j t)\equiv\\
\equiv 0.
\end{gathered} \tag{24}$$

Итак, если система (1) имеет сильно нерегулярное периодическое решение $x(t)$, то выполняются условия (22), (24), при этом

$$x(t)=S^{-1}z(t), \tag{25}$$

где вектор $z(t)$ определяется равенством (23).

Покажем, что полученные условия являются достаточными. При выполнении условия (17) найдется постоянная неособенная $(n\times n)$-матрица S такая, что у матрицы SA первые q строк будут линейно независимыми, а остальные $n-q$ строк будут нулевыми. Сделаем замену переменных (18), которая приводит систему (1) к системе (19).

Теперь обратимся к системе (21). Поскольку чисто мнимые числа (22) будут собственными значениями матрицы $C = SBS^{-1}$, то первая система в (21) имеет $2h$-параметрическое семейство Ω-периодических решений (23). Так как выполняются тождества (24), то система (21) имеет решение (23). В силу условия (2) вектор $z(t)$ удовлетворяет также системе (20). Тогда в силу [5] Ω-периодический вектор $z(t)$ удовлетворяет системе (19). Возвращаясь к исходным переменным, находим сильно нерегулярное решение системы (1) в виде тригонометрического многочлена (25).

Таким образом, доказана

Т е о р е м а 2. *Пусть в системе* (1) *стационарный коэффициент A является вырожденным и его ранг равен q, а среднее значение периодического коэффициента* $P(t)$ *является нулевым.*

Для того чтобы система (1) *имела сильно нерегулярное периодическое решение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия* (22), (24).

Если система (1) *имеет сильно нерегулярное периодическое решение, то оно будет иметь вид* (25).

Укажем далее еще один подход к выяснению условий существования сильно нерегулярных периодических решений системы (1) с нулевым средним периодического коэффициента и вырожденным стационарным коэффициентом.

Пусть $x(t)$ – Ω-периодическое решение системы (1), при этом считаем, что хотя бы одна из его компонент отлична от стационарной, а отношение ω / Ω является иррациональным числом. Из [11, с. 21–22] вытекает, что при выполнении условия (17) найдется постоянная неособенная $(n \times n)$-матрица S такая, что у матрицы SA первые q строк будут линейно независимыми, а остальные $n - q$ строк будут нулевыми. Введем замену переменных (18), которая приводит систему (1) к системе (19).

Согласно [5], Ω-периодический вектор $z(t) = Sx(t)$ удовлетворяет системе (20), которая в силу условия (2), принимает вид (21). Обозначим через $G_1(t)$ матрицу размерности $q \times n$, составленную из первых q строк матрицы $G(t)$. Тогда, учитывая структуру матрицы SA, систему (21) можно записать в виде

$$\dot{z} = Cz, \quad G_1(t)z = 0. \tag{26}$$

Если столбцы матрицы $G_1(t)$ линейно независимы, то из второй системы в (26) следует тривиальность $z(t)$, что противоречит сделанному допущению. Значит, матрица $G_1(t)$ имеет неполный столбцовый ранг

$$\operatorname{rank}_{\mathrm{col}} G_1 = r < n. \tag{27}$$

При выполнении условия (27) согласно [6, с. 43] найдется постоянная неособенная $(n \times n)$-матрица Q такая, что у матрицы $G_1(t)Q$ первые $n - r = p$ столбцов будут нулевыми, в то время как остальные r столбцов будут линейно независимыми. Введем еще одну замену переменных

$$z = Qy, \tag{28}$$

которая приводит систему (26) к системе

$$\dot{y} = Dy, \quad G_2(t)y = 0 \quad (D = Q^{-1}SBS^{-1}Q,\ G_2(t) = G_1(t)Q). \tag{29}$$

Эта система имеет сильно нерегулярное периодическое решение $y(t) = Q^{-1}Sx(t)$. Так как у матрицы $G_2(t)$ первые p столбцов нулевые, а остальные r столбцов линейно независимы, то из второй системы в (29) на основании [6, с. 43] следует, что последние r компонент вектора $y(t)$ будут тривиальными, т. е.

$$y(t) = \operatorname{col}(y^{[p]}(t), y_{[r]}(t)), \quad y^{[p]}(t) = \operatorname{col}(y_1(t), \ldots, y_p(t)), \quad y_{[r]}(t) = \operatorname{col}(y_{p+1}(t), \ldots, y_n(t)) \equiv 0.$$

Это означает, что система (29) имеет следующую структуру:

$$\dot{y}^{[p]} = D_{p,p}y^{[p]}, \quad D_{r,p}y^{[p]} = 0, \quad y_{[r]} = 0, \tag{30}$$

где $D_{p,p}$, $D_{r,p}$ – левые верхний и нижний блоки матрицы D (нижние индексы указывают размерность). Как видно из (30), Ω-периодический вектор $y^{[p]}(t)$ является решением линейной стационарной системы. Поэтому среди собственных значений матрицы коэффициентов $D_{p,p}$ первой системы в (30) будут числа

$$\pm i\lambda_j, \quad (j = 1, \ldots, p'; \; p' \le [p/2]), \tag{31}$$

где $\lambda_j = 2m_j\pi/\Omega$, $m_j \in \mathbb{N}$. Пусть h_j – число групп элементарных делителей, отвечающих собственному значению $\pm i\lambda_j$, $(j = 1, \ldots, p'; \; h_1 + \ldots + h_{p'} = h; \; 2h \le p)$. Это означает, что вектор $y^{[p]}(t)$ представлен тригонометрическим полиномом вида

$$y^{[p]}(t) = \sum_{j=1}^{p'} a_j \cos\lambda_j t + b_j \sin\lambda_j t, \tag{32}$$

где коэффициенты a_j, b_j зависят от $2h$ произвольных вещественных постоянных. Поскольку $y^{[p]}(t)$ удовлетворяет и второй системе в (30), то имеет место тождество

$$D_{r,p} \sum_{j=1}^{p'} a_j \cos\lambda_j t + b_j \sin\lambda_j t \equiv 0. \tag{33}$$

Итак, если система (1) имеет сильно нерегулярное периодическое решение $x(t)$, то выполняются условия (27), (31), (33), при этом

$$x(t) = S^{-1}Q \operatorname{col}(y^{[p]}(t), 0, \ldots, 0), \tag{34}$$

где вектор $y^{[p]}(t)$ определяется равенством (32).

Покажем, что полученные условия являются достаточными. Обратимся к системе (26). В силу условия (27) найдется постоянная неособенная $(n \times n)$-матрица Q такая, что замена переменных (28) приводит (26) к системе (29), где у матрицы $G_2(t)$ первые p столбцов нулевые, а остальные r столбцов линейно независимы. Согласно [6, с. 43], последнее обстоятельство означает, что $y = \operatorname{col}(y^{[p]}, 0, \ldots, 0)$, $y^{[p]} = \operatorname{col}(y_1, \ldots, y_p)$. С учетом этого система (29) примет вид (30). Поскольку чисто мнимые числа (31) будут собственными значениями матрицы $D_{p,p}$, то первая система в (30) имеет $2h$-параметрическое семейство Ω-периодических решений (32). Так как выполняется тождество (33), то система (30) имеет решение $y(t) = \operatorname{col}(y^{[p]}(t), 0, \ldots, 0)$.

Обратная замена переменных $y = Q^{-1}z$ позволяет найти Ω-периодическое решение системы (26), а значит, и системы (21). В силу условия (2) вектор $z(t)$ удовлетворяет также и системе (20). Тогда из [5] вытекает, что $z(t)$ является Ω-периодическим решением системы (19). Возвращаясь к исходным переменным, заключаем, что тригонометрический многочлен (34) является сильно нерегулярным решением системы (1).

Таким образом, доказана

Т е о р е м а 3. *Пусть в системе* (1) *стационарный коэффициент A является вырожденным и его ранг равен q, а среднее значение периодического коэффициента* $P(t)$ *является нулевым.*

Если система (1) *имеет сильно нерегулярное периодическое решение, то оно будет тригонометрическим многочленом вида (34). Для того чтобы* (34) *было решением системы* (1), *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия* (27), (31), (33).

З а м е ч а н и е. При доказательстве теоремы 2 мы вводим замену с целью привести матрицу $AP(t)$ к специальному блочному виду (последние несколько строк нулевые), затем исходная система распадается на две системы, одна из которых не является дифференциальной и ее матрица коэффициентов имеет тот же специальный блочный вид. При доказательстве теоремы 3 мы вводим две замены, но это позволяет свести исходную систему к системе меньшей размерности.

Литература

1. *Massera J. L.* // Bol. de la Facultad de Ingenieria. 1950. Vol. 4, no 1. P. 37–45.
2. *Курцвейль Я., Вейвода О.* // Чехослов. мат. журн. 1955. Т. 5, № 3. С. 362–370.
3. *Еругин Н. П.* Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами. Минск, 1963. С. 203–208.
4. *Гайшун И. В.* // Докл. АН БССР. 1979. Т. 23, № 8. С. 684–686.
5. *Грудо Э. И.* // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 9. С. 1499–1504.
6. *Деменчук А. К.* Асинхронные колебания в дифференциальных системах. Условия существования и управления. Lambert Academic Publishing. Saarbrücken, 2012. С. 40–49.
7. *Белокурский М. С., Деменчук А. К.* // Докл. НАН Беларуси. 2014. Т. 58, № 4. С. 17–22.
8. *Зайцев В. А.* // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. 2003. С. 31–62.
9. *Габдрахимов А. Ф., Зайцев В. А.* // Изв. ИМИ УдГУ. 2006. № 3 (37). С. 21–22.
10. *Леонов Г. А.* // Автоматика и телемеханика. 2001. № 5. С. 190–193.
11. *Хорн Р.* Матричный анализ. М., 1989. С. 19–24.

M. S. BELOKURSKY

SOLUTION OF ERUGIN'S PROBLEM ON THE EXISTENCE OF IRREGULAR SOLUTIONS OF THE LINEAR SYSTEM WITH ZERO MEAN OF PERIODIC COEFFICIENT

Summary

We consider the linear periodic system with zero mean of periodic coefficient. The necessary and sufficient conditions, under which linear periodic differential system has strongly irregular periodic solutions, were obtained.